CAPíTULO 16

A EDP do Transporte e Curvas Características

16.1. A EDP do Transporte

Na proposição a seguir, apresentamos a EDP do Transporte, já com sua solução geral.

PROPOSIÇÃO 128. *Seja $c \in \mathbb{R}$. A solução geral da* ***Equação do Transporte***

$$cu_x + u_y = 0 \tag{16.1}$$

é

$$u(x,y) = f(x - cy)$$

onde f é uma função arbitrária[1]*.*

DEMONSTRAÇÃO. Mostremos isso de duas formas – uma mais geométrica, e outra mais algébrica. Ambas são muito instrutivas e serão úteis mais à frente.

Geometricamente: dado um ponto (x_0, y_0) no domínio de u, considere as retas parametrizadas $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ onde

$$x(s) = cs + x_0;\ y(s) = s + y_0$$

(mais tarde, veremos que tais retas são as **curvas características** da EDP do Transporte). Definindo $U(s) = u(x(s), y(s))$, note que

$$U'(s) = u_x x'(s) + u_y y'(s) = cu_x + u_y = 0$$

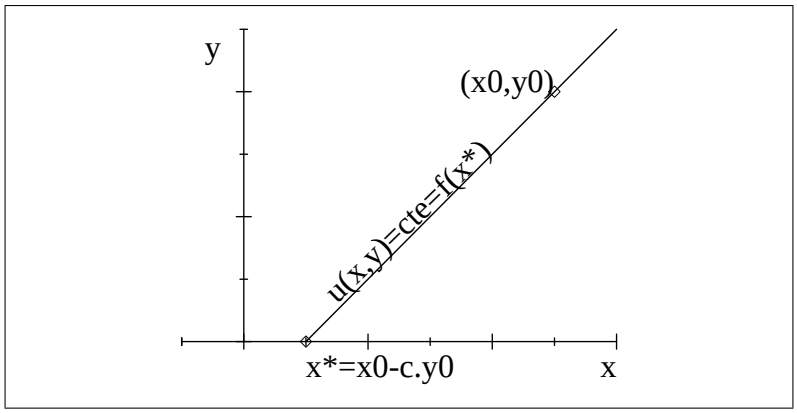
Assim, $U(s) = cte.$, isto é, $u(x,y)$ é constante ao longo de cada uma destas retas! Em particular, note que $\gamma(s)$ corta o eixo x em $(x_0 - cy_0, 0)$. Escrevendo $x^* = x_0 - cy_0$, temos que

$$u(x_0, y_0) = u(x^*, 0)$$

Mas $u(x^*, 0)$ é alguma função de uma variável, digamos, $f(x^*)$. Assim

$$u(x_0, y_0) = f(x^*) = f(x_0 - cy_0)$$

onde f é uma função arbitrária. Como o ponto (x_0, y_0) é arbitrário, temos $u(x,y) = f(x - cy)$.



Algebricamente: Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} w &= x - cy \\ z &= y \end{aligned}$$

(a ideia é que as retas características são da forma $w = cte$). Pela Regra da Cadeia, podemos re-escrever nossa EDP em termos das novas variáveis (abusamos notação e chamamos a nova função ainda de u):

$$\begin{aligned} u_x &= u_w w_x + u_z z_x = u_w \\ u_y &= u_w w_y + u_z z_y = -cu_w + u_z \end{aligned}$$

[1] A princípio, f não é totalmente arbitrária, pois $f(x - cy)$ tem que ter derivadas parciais com relação a x e y. Discutiremos isto mais abaixo.

Jogando tudo na EDP original, vem simplesmente

$$u_y + cu_x = u_z = 0$$

ou seja, u não depende de z! Portanto, $u(x,y) = f(w)$ apenas! Voltando às variáveis originais

$$u(x,y) = f(x - cy)$$

para alguma função f a ser determinada. □

A tal função f arbitrária pode ser obtida a partir de condições de contorno apropriadas. Vejamos um exemplo explícito:

EXEMPLO 129. *Resolva o problema*

$$\begin{aligned} 2u_x + u_y &= 0 \text{ se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) &= x^2 \text{ se } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Solução. *Como vimos acima, a solução será da forma*

$$u(x,y) = f(x - 2y)$$

Para descobrir a função f, usamos a condição de contorno. Vem

$$u(x,0) = f(x) = x^2$$

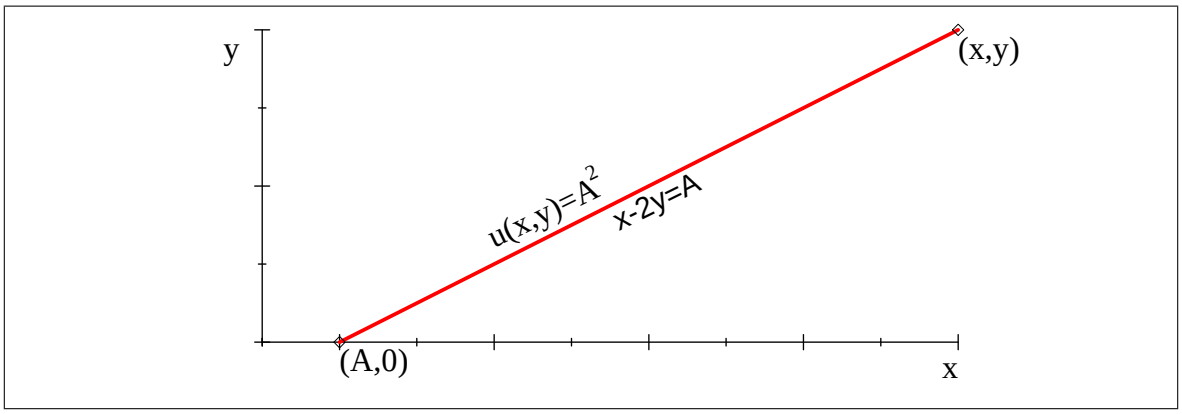
Portanto

$$u(x,y) = (x - 2y)^2$$

Note como a condição de contorno $u(x,0) = x^2$ afeta a resposta. Por exemplo, sabemos que $u(3,0) = f(3) = 9$ pela condição de contorno; a reta característica que passa por $(3,0)$ é $x - 2y = 3$. Então todos os pontos da reta $x - 2y = 3$ têm o mesmo valor de u, pois neles

$$u(x,y) = f(x - 2y) = f(3) = 9$$

Então é como se o valor de u no ponto $(3,0)$ tivesse sido "transportado"para todos os outros pontos desta reta – pois é, ***Equação do Transporte****. O mesmo vale para outros pontos do eixo x – o valor $u(A,0) = A^2$ é transportado para todos os pontos da reta $x - 2y = A$.*



Tecnicamente, o raciocínio acima mostra que, **se houver alguma solução de 16.1**, ela é da forma $u(x,y) = f(x - cy)$. Falta verificar a volta: se $u(x,y) = f(x - cy)$, então u satisfaz 16.1? Em outras palavras, $u(x,y) = f(x - cy)$ é de fato a solução? Se f for diferenciável, é fácil verificar que, se $u(x,y) = f(x - cy)$, então

$$\begin{aligned} u_x &= f'(x - cy) \text{ e } u_y = -cf'(x - cy) \Rightarrow u_y + cu_x = 0 \\ u(x,0) &= f(x - c.0) = f(x) \end{aligned}$$

e, assim, esta solução serve. Por outro lado, *mesmo que f não seja diferenciável*, a solução encontrada acima é comumente aceita como a "melhor"solução de 16.1 (mesmo que u_x ou u_y não existam em alguns pontos, onde a equação $u_y + cu_x = 0$ não faria sentido). Por este motivo, quando f não é diferenciável, diz-se que $u(x,y) = f(x - cy)$ é uma **solução fraca de 16.1.** Vejamos um exemplo, dando uma intepretação de y como tempo (t):

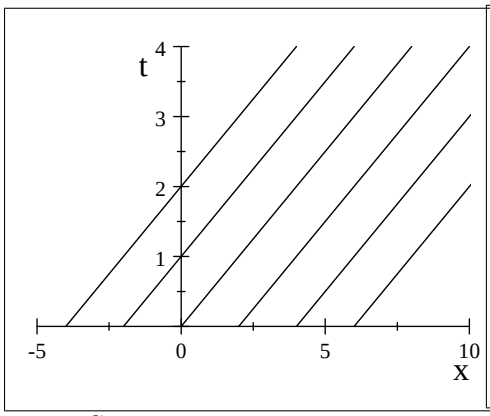
EXEMPLO 130. *Considere*

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x &= 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -2 \\ \frac{x^2-1}{3}, & -2 < x \leq 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

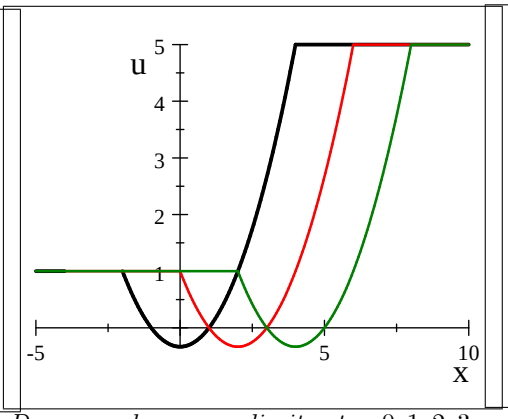
Acompanhando o raciocínio para o caso geral, vemos que u é constante ao longo das retas $x-2t=$ constante. Para o ponto (x_0,t_0) indicado na figura acima, vemos que $u(x_0,t_0)=f(x_0-2t_0)$. Em outras palavras, a solução é

$$u(x,t)=f(x-2t)=\begin{cases}1 & se \quad x-2t\leq -2\\ \frac{(x-2t)^2-1}{3} & se \quad -2<x-2t\leq 4\\ 5 & se \quad x-2t>4\end{cases}$$

As figuras seguintes esboçam (i) as curvas características deste problema no plano xt, (ii) a solução para vários valores distintos de t no plano ux e (iii) o gráfico da solução $u(x,t)$ no espaço xtu. Aprenda a distinguir e entender cuidadosamente cada um destes gráficos! Em particular, note como as características determinam as "zonas de dependência da solução-- uma pequena perturbação na condição inicial (digamos, próxima a $x=-2$ quando $t=0$) viajará ao longo da curva característica, e só afetará a solução em $x=8$ quando $t=\frac{8-(-2)}{2}=5$. Em outras palavras, as ondas viajam para a direita com velocidade $c=2$.



Caracteristicas $x-2t=cte$.



Da esquerda para a direita: $t=0,1,2,3$.

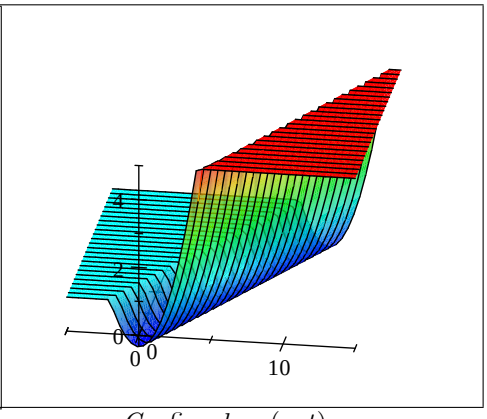


Grafico de $u(x,t)$

Também vale a pena notar que $u(x,t)$ não é diferenciável nos pontos da reta $x-ct=-2$ nem nos pontos da reta $x-ct=4$. Ainda assim, esta é a solução tipicamente aceita ("solução fraca") do sistema acima.

16.2. Curvas Características

Você deve ter notado que as tais retas características ajudaram a resolver a EDP do Transporte pois transformam a EDP em várias EDOs ao longo de cada reta. O **Método das Curvas Características** generaliza esta ideia para outras EDPs lineares de primeira ordem, isto é, EDPs do tipo

$$A(x,y)\,u_x+B(x,y)\,u_y+C(x,y)\,u=F(x,y)$$

A chave é a álgebra feita na resolução da primeira EDP do transporte – as retas características funcionaram pois tínhamos $x'(s)=c$ (o termo na frente do u_x) e $y'(s)=1$ (o termo na frente do u_y). Estas igualdades que permitiram transformam o termo $c\cdot u_x+1\cdot u_y$ em $\frac{dU}{ds}$, ou seja, transformaram a EDP (em $u(x,y)$) numa EDO (em $U(s)=u(x(s),y(s))$). Isto nos inspira a definir:

DEFINIÇÃO 131. *Dada a EDP linear de primeira ordem*

$$A(x,y)\,u_x+B(x,y)\,u_y+C(x,y)\,u=F(x,y) \tag{16.2}$$

*suas **curvas características planas** $\gamma(s)=(x(s),y(s))$ são as soluções do sistema de EDOs*

$$\begin{aligned}x'(s) &= A(x,y)\\ y'(s) &= B(x,y)\end{aligned}$$

Resolver este sistema de EDOs para encontrar explicitamente as curvas características pode ser bem complicado! Isto dito, temos:

PROPOSIÇÃO 132. *Seja $\gamma(s)=(x(s),y(s))$ uma curva característica da EDP 16.2 acima. Se $u=u(x,y)$ é solução de tal EDP, então a função $U(s)=u(x(s),y(s))$ satisfaz a EDO*

$$U'+C(x(s),y(s))\,U=F(x(s),y(s))$$

DEMONSTRAÇÃO. De fato

$$U'(s)=u_x x'(s)+u_y y'(s)=Au_x+Bu_y$$

e portanto

$$U'+C(x(s),y(s))\,U=Au_x+Bu_y+Cu=F$$

□

A ideia é então resolver a EDO em U, e daí descobrir u, como já fizemos na EDP do transporte! Vejamos um par de exemplos:

EXEMPLO 133. *Resolva o problema*

$$\begin{aligned} u_x + 2u_y &= 2x \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) &= y^2 \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Solução. *Este problema só não é a EDP do Transporte pois não é homogêneo! Isto dito, as curvas características são as mesmas de antes*

$$x'(s) = 1;\ y'(s) = 2 \Rightarrow x(s) = s + x_0;\ y(s) = 2s + y_0$$

Definindo $U(s) = u(x(s), y(s))$, *temos:*

$$U'(s) = u_x x'(s) + u_y y'(s) = u_x + 2u_y = 2x = 2s + 2x_0$$

que é uma EDO com solução simples

$$U(s) = s^2 + 2sx_0 + C.$$

Para calibrar a constante, usamos a condição $u(0,y) = y^2$ *- basta encontrar qual* s *torna* $x = 0$

$$x(s) = 0 \Leftrightarrow s = -x_0$$

Agora sabemos como calibrar tudo:

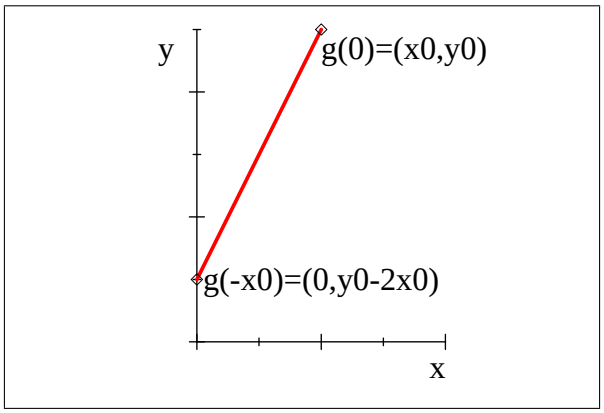
$$\begin{aligned} U(-x_0) &= u(0, y_0 - 2x_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_0^2 - 2x_0^2 + C = (y_0 - 2x_0)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C = (y_0 - 2x_0)^2 + x_0^2 \end{aligned}$$

Agora tome $s = 0$ *e vai acabar*

$$\begin{aligned} U(0) &= u(x(0), y(0)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x_0, y_0) = C = (y_0 - 2x_0)^2 + x_0^2 \end{aligned}$$

Como isso vale para quaisquer x_0, y_0, *a resposta é*

$$u(x,y) = (y - 2x)^2 + x^2 = 5x^2 - 4xy + y^2$$



Note que desta vez, o valor de $u(0,y)$ *não foi simplesmente* ***transportado*** *ao longo da reta característica – ele serviu de constante inicial, mas teve que ser atualizado com os valores de* $F(x,y)$ *ao longo da reta. Ainda assim, note: o valor de* $u(x,y)$ *depende apenas dos valores de* $F(x,y)$ *e da condição de contorno* ***ao longo da reta característica!***

EXEMPLO 134. *Encontre as soluções do problema*

$$\begin{cases} xu_x + yu = y^2 \\ u(1,y) = h(y) \end{cases}$$

no domínio $x > 0$.

Solução. *As curvas características satisfazem*

$$\begin{aligned} x' &= x \Rightarrow x(s) = C_1 e^s \\ y' &= 0 \Rightarrow y(s) = C_2 \end{aligned}$$

Desta vez, as curvas características são semirretas horizontais! Dado um ponto (x_0, y_0) *do plano, a curva característica que passa por este ponto em* $s = 0$ *é*

$$x(s) = x_0 e^s; y(s) = y_0$$

Esta semirreta intersecta a reta $(1,y)$ *quando*

$$x_0 e^s = 1 \Rightarrow s = -\ln x_0$$

Enfim, estamos prontos para traduzir nosso problema original em termos de $U(s) = u(x(s), y(s))$. *Temos*

$$\begin{aligned} U'(s) + y(s)\,U(s) &= (y(s))^2 \Rightarrow U' + y_0 U = y_0^2 \\ U(-\ln x_0) &= u(1, y_0) = h(y_0) \end{aligned}$$

A EDO tem $U(s) = y_0$ *como solução particular, e* $U(s) = Ke^{-y_0 s}$ *como solução geral da homogênea, assim*

$$U(s) = y_0 + Ke^{-y_0 s}$$

Calibrando K

$$U(-\ln x_0) = y_0 + Ke^{y_0 \ln x_0} = h(y_0) \Rightarrow K = (h(y_0) - y_0)\, x_0^{-y_0}$$

e portanto

$$u(x_0, y_0) = U(0) = y_0 + K = y_0 + (h(y_0) - y_0)\, x_0^{-y_0}$$

Como (x_0, y_0) *era um ponto arbitrário, vem*

$$u(x,y) = y + (h(y) - y)\, x^{-y}$$

16.3. Exercícios

1) Resolva cada um dos problemas a seguir, esboçando suas curvas características no plano xt e seus gráficos no plano xu para alguns valores positivos de t.

a) $\begin{cases} u_t + 3u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = x^3 + 2x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t - 2u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = e^x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Respostas parciais: a) $u(x,t) = (x-3t)^3 + 2(x-3t)$. *b)* $u(x,t) = e^{x+2t}$.

2) No primeiro problema do exercício anterior introduziu-se uma perturbação na condição inicial em $x = 0$. Uma pessoa posicionada em $x = 33$ demorará quanto tempo para perceber a perturbação? E se a perturbação for introduzida no segundo problema?

Respostas: a) Demorará 11 *unidades de tempo; b) A perturbação nunca chega a* $x = 33$.

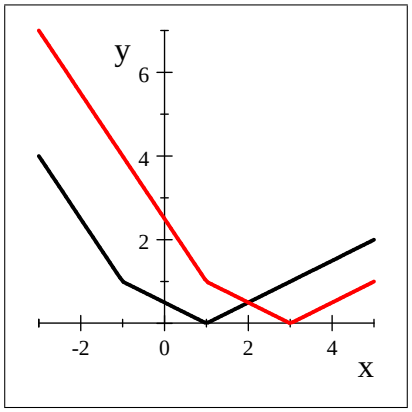
3) Esboce as curvas características do problema a seguir no plano xt e marque neste mesmo plano a localização da reta onde a condição de contorno está definida. Em seguida, resolva o problema.

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R} \\ u(s, 2s+1) = 3s^2 \text{ para } s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = \frac{(x-2t+2)^2}{3}$.

4) Esboce no plano ux gráficos da solução fraca de $\begin{cases} u_t + 2u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = \left| x - \frac{|x+1|}{2} \right| \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ para vários valores distintos de t.

Resposta parcial: $t = 0$ *é o da esquerda,* $t = 1$ *é o da direita:*



5) Para cada um dos problemas a seguir, encontre e esboce as Curvas Características passando por um ponto arbitrário $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e destaque onde tais curvas intersectam a região onde são dadas as condições de contorno. Em seguida, resolva cada problema em $\mathbb{R}^2$:

a) $\begin{cases} u_t = 3u_x \\ u(x,0) = \sin x \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_x + u_y = 2x \\ u(0,y) = y^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xu_x + u = x^2 \text{ para } x > 0 \\ u(1,y) = y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2yu_x + u_y = 2y^2 + x \\ u(x,1) = f(x) \end{cases}$ e) $\begin{cases} -yu_x + xu_y = 4xy \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$

Respostas: a) $u(x,t) = \sin(x+3t)$; *b)* $u(x,y) = x^2 + (y-x)^2$; *c)* $u(x,y) = \frac{x^2}{3} + \frac{3y^2-1}{3x}$; *d)* $u(x,y) = y^2 + xy - 1 - x + f\left(1 + x - y^2\right)$; *e).*$u(x,y) = x^2 + 3y^2$